

# Influence du compromis entre exploitation de la diversité et gain de codage dans les systèmes OFDM multi-entrées multi-sorties

Maxime GUILLAUD, Dirk T.M. SLOCK

Institut Eurécom\*, Département Communications Mobiles  
2229 route des Crêtes, B.P. 193, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France  
{maxime.guillaud, dirk.slock}@eurecom.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons à l’exploitation de la diversité d’un canal MIMO OFDM grâce à la méthode du précodage linéaire. Les performances de ce systèmes dépendent essentiellement de deux facteurs de gain, le gain de codage et le gain de diversité. Nous vérifions expérimentalement, grâce à un canal dont la diversité en fréquence est artificiellement fixée, que l’exploitation de la diversité par précodage linéaire est bénéfique jusqu’à ce que toute la diversité offerte par le canal soit exploitée, puis atteinte une saturation. Nous montrons aussi que l’exploitation de plus de diversité que ce qu’offre effectivement le canal n’est pas néfaste, aussi bien dans le cas idéalisé d’une détection sans interférence, qu’en utilisant un récepteur sous-optimal. Nous constatons que le gain de codage sur le taux d’erreur symbole, plus élevé pour de petites tailles de la matrice de précodage lorsque le rapport signal-à-bruit est faible, n’a pas d’influence sur les performances exprimées en termes de taux d’erreur binaire.

**Abstract** – We investigate the exploitation of diversity in a MIMO-OFDM channel through the use of a linear precoder. For such systems, performance depends on both the coding gain and the diversity gain. Through the use of a channel with artificially controlled frequency diversity, we verify that exploiting diversity improves performance until all the channel diversity is exploited, and reaches a saturation then. We show that trying to exploit more diversity than that actually available does not hurt performance, in the ideal interference-free detection case as well as with a suboptimal detector. We show that the coding gain advantage of small precoding matrices at low SNRs vanishes when the Bit Error Rate metric is considered instead of the Symbol Error Rate.

## 1 Introduction

Les systèmes de communications multi-entrées multi-sorties (MEMS, en anglais MIMO, Multiple-Input Multiple-Output) sont l’objet d’un regain d’intérêt suscité par des travaux [1, 2] montrant que la capacité d’un canal MIMO est nettement supérieure à celle atteignable en utilisant une seule antenne. L’importance de l’exploitation de la *diversité* pour se prémunir contre les affaiblissements du canal a été rapidement comprise [3]. Cette méthode consiste à transmettre chaque symbole plusieurs fois, en faisant en sorte que chacune de ces transmissions subisse un affaiblissement différent de la part du canal. Ce concept est généralisable pour chaque dimension pour laquelle le canal présente des variations : spatiale, temporelle, fréquentielle... Diverses méthodes ont été proposées pour exploiter la diversité. Nous nous intéressons à la méthode du précodage linéaire des symboles de constellation en bande de base, en l’absence de connaissance du canal à l’émission.

## 2 Principe du précodage linéaire

Après modulation (mappage) en bande de base,  $L \geq N$  symboles complexes consécutifs sont rassemblés dans un vecteur  $\mathbf{a}_k$ . L’opération de précodage linéaire prend la forme de la

prémultiplication par une matrice  $\mathbf{Q}$  carrée ( $L \times L$ )

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{Q}\mathbf{a}_k \quad (1)$$

où

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_1^{L-1} \\ 1 & \theta_2 & \dots & \theta_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \theta_L & \dots & \theta_L^{L-1} \end{pmatrix}$$

avec  $\theta_l = e^{j\frac{\pi}{L}(1+2l)}$ ,  $l = 1 \dots L$ . La structure de la matrice de précodage  $\mathbf{Q}$  est obtenue par optimisation [4], en l’absence de connaissance du canal par l’émetteur, et dans le cas où les coefficients du canal sont indépendants et identiquement distribués selon une distribution de Rayleigh. En particulier, sa structure garantit un degré de diversité  $L$ . Nous appliquons ici le précodage linéaire à l’exploitation de la diversité spatiale et fréquentielle d’un canal OFDM. Le détail du schéma de transmission utilisé est donné en section 4.

## 3 Gain de diversité, gain de codage

Tarokh a montré [3] que dans le cas où le canal suit un modèle d’affaiblissement de Rayleigh, la probabilité d’erreur symbole est bornée par

$$P(\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}'_k) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-n} (E_s/4N_0)^{-rn} \quad (2)$$

\* Les travaux de recherche d’Eurécom sont financés par ses partenaires industriels : Ascom, Swisscom, Thales Communications, ST Microelectronics, Cegetel, Motorola, France Télécom, Bouygues Télécom, Hitachi Europe et Texas Instruments. Le travail dont cette communication est l’objet est également financé par le projet RNRT ANTIPODE.

où  $n$  représente la diversité de réception, donc est fixé par la géométrie du système,  $E_s/4N_0$  est le rapport signal-à-bruit, les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres d'une matrice caractéristique de la distance entre deux mots du code dans le cas d'une erreur entre  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{a}'_k$ , et où  $r$  est le rang de cette matrice. Dans le cas qui nous concerne,  $r$  et les  $\lambda_i$  dépendent du choix de la matrice  $\mathbf{Q}$ . En particulier, si celle-ci est correctement construite,  $r$  est proportionnel à  $L$

La prépondérance du second terme du produit dans l'équation (2), dénommé *gain de diversité*, lorsque le rapport signal-à-bruit est grand, est immédiatement observable. En revanche, pour des valeurs non asymptotiquement élevées de  $E_s/N_0$ , le premier terme du produit, c'est-à-dire le *gain de codage*, peut jouer un rôle non négligeable. Nous étudions donc expérimentalement l'évolution de la probabilité d'erreur en fonction de la taille de  $\mathbf{Q}$ .

## 4 Description des simulations

Nous nous intéressons à un système multiporteuses (aussi appelé OFDM, Orthogonal Frequency Division Multiplexing) comportant  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception, et travaillant sur  $P$  sous-bandes de fréquence. Tous les résultats présentés ici ont été obtenus dans le cas d'un système pour lequel  $M = N = 2$  antennes, utilisant  $P = 60$  porteuses.

Le modèle de transmission choisi consiste à générer, pour chaque symbole OFDM,  $K = \frac{MP}{L}$  vecteurs  $\mathbf{a}_k = [a_{k,0} \dots a_{k,L-1}]^T$ ,  $k = 0 \dots K - 1$ . Chaque  $\mathbf{a}_k$  contient  $L$  symboles d'une constellation BPSK, et il est précodé linéairement ( $\mathbf{x}_k = \mathbf{Q}\mathbf{a}_k$ ). Les valeurs obtenues dans  $\mathbf{x}_k$  sont réparties sur les différentes antennes d'émission, et sur les sous-bandes OFDM, ce que nous dénotons par *étalement spatio-fréquentiel*. Les contraintes imposées lors de l'étalement spatio-fréquentiel sont que

- sur une fréquence donnée, et à un instant donné, deux antenne d'émission ne peuvent pas transmettre des symboles du même flux
- les éléments d'un  $\mathbf{x}_k$  doivent "voir" des canaux aussi différents que possible, afin de maximiser la diversité. Si le canal connaît une corrélation entre fréquences adjacentes, ils devront par exemple être le plus éloignés possible en fréquence.

Ce modèle est décrit et justifié en détail dans [4].

Si l'on rassemble tous les symboles transmis dans un même symbole OFDM dans un vecteur

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_0^T \dots \mathbf{a}_{K-1}^T]^T, \quad (3)$$

l'ensemble de la transmission peut s'écrire

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{W}(\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{Q})\mathbf{A} + \mathbf{V} \quad (4)$$

où la matrice des coefficients du canal est de la forme

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{H}^{(P-1)} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

chacune des matrices  $\mathbf{H}^{(p)}$ , de taille  $N \times M$ , représentant le canal MIMO correspondant à la sous-porteuse  $p$ .  $\mathbf{W}$  est une matrice de permutation de taille  $PN \times PN$  qui réalise l'étalement spatio-fréquentiel selon les caractéristiques exprimées précédemment, et  $\mathbf{V}$  est un bruit blanc gaussien i.i.d.

Le modèle de canal choisi permet de contrôler précisément la diversité fréquentielle  $D$  offerte par le canal, qui est celle qui nous sert de référence. Il consiste à découper le spectre de fréquence en  $D$  plages, à l'intérieur desquelles les coefficients du canal sont totalement corrélés en fréquence. En d'autres termes,  $\mathbf{H}^{(p)} = \mathbf{H}^{(P/D \lfloor \frac{p}{P/D} \rfloor)}$  pour  $p = 0 \dots P - 1$ . Les valeurs du canal restent naturellement totalement décorrélées dans l'espace.

Intéressons-nous à la transmission du symbole  $\mathbf{a}_k$ , que l'on peut isoler dans

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{a}_k + \mathbf{g}_k + \mathbf{v}_k. \quad (6)$$

$\mathbf{H}_k$  est une matrice bloc-diagonale de dimensions  $NL \times L$ , qui contient sur sa diagonale  $L$  colonnes provenant chacune d'une matrice  $\mathbf{H}^{(p)}$  différente.  $\mathbf{g}_k$  regroupe les interférences provenant des autres symboles ( $\mathbf{a}_{k'}, k' \neq k$ ), et  $\mathbf{v}_k$  la contribution du bruit. Cette écriture montre que la diversité maximale atteignable par ce système est  $NL$ , dans l'hypothèse où les réalisations du canal sont suffisamment décorrélées entre les fréquences. Les simulations présentées dans cet article utilisent la valeur  $D = 3$ , et comparent les performances du précodage linéaire pour différentes valeurs de  $L$ .

Toutes les simulations ont été effectuées sous l'hypothèse d'une connaissance parfaite du canal par le récepteur, et d'aucune connaissance du canal par l'émetteur. Deux types de détection ont été utilisées, et sont présentées ci-après.

### 4.1 Détection MV-BFA

Ce cas correspond à l'hypothèse où l'on ignore artificiellement la présence de l'interférence entre symboles ( $\mathbf{g}_k = 0$ ). On peut donc opérer une détection selon le maximum de vraisemblance dans un bruit Gaussien, afin de vérifier le gain de diversité de l'équation (2). Nous la désignons par MV-BFA. Il s'agit d'un cas idéalisé destiné à mettre en évidence la performance maximale atteignable par ce schéma de transmission, en supposant que le récepteur dispose de ressources de calcul importantes.

### 4.2 Détection EQMM-IC

Ce type de détection, correspondant à un cas plus réaliste, prend en compte les interférences entre symboles. Le premier étage est un estimateur linéaire non biaisé minimisant l'erreur quadratique moyenne (EQMM)

$$\hat{\mathbf{a}}_k^0 = \text{diag} \left( \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}} \mathcal{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}}^H \right)^{-1} \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}} \mathcal{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{y}_k \quad (7)$$

où  $\mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}} = \mathbf{Q}^H \mathbf{H}_k^H$  et  $\mathcal{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{H}_k^H + (\sigma_g^2 + \sigma_v^2) \mathbf{I}_{NL}$ ,  $\sigma_v^2$  et  $\sigma_g^2$  étant respectivement la variance du bruit et de l'interférence. Il est suivi d'une estimation Bayésienne prenant en

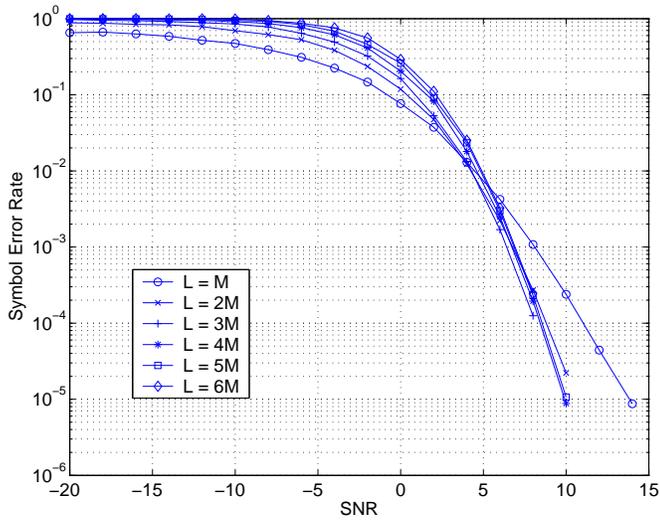


FIG. 1: Taux d'erreur symbole avec détection MV-BFA

compte l'information *a priori* sur la constellation  $\mathcal{C}$  utilisée :

$$\hat{a}_{k,l}^{ap} = \frac{\sum_{a \in \mathcal{C}} a P(a_{k,l} = a) P(\hat{a}_{k,l} | a_{k,l} = a)}{\sum_{a \in \mathcal{C}} P(a_{k,l} = a) P(\hat{a}_{k,l} | a_{k,l} = a)}, \quad (8)$$

et d'un étage d'annulation d'interférence où  $\hat{\mathbf{g}}_k^{ap}$  est calculé à partir des symboles interférents  $\hat{\mathbf{a}}_{k,l}^{ap}$ ,  $k' \neq k$  :

$$\hat{\mathbf{a}}_k^1 = \text{diag} \left( \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}} \mathcal{R}'_{\mathbf{y}\mathbf{y}}{}^{-1} \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}}^H \right)^{-1} \mathcal{R}_{\mathbf{a}\mathbf{y}} \mathcal{R}'_{\mathbf{y}\mathbf{y}}{}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{g}}_k^{ap}). \quad (9)$$

avec  $\mathcal{R}'_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{H}_k^H + \sigma_v^2 \mathbf{I}_{NL}$ .

## 5 Résultats expérimentaux

### 5.1 Détection MV-BFA

On constate sur la figure 1 que, conformément à ce qui était attendu, l'augmentation de la taille de la matrice de précodage linéaire accentue la pente du taux d'erreur symbole. Un phénomène de saturation apparaît pour  $L \geq 3M$  lorsque toute la diversité du canal est exploitée ( $NL \geq NMD$ ). Il est intéressant de remarquer que cette saturation n'implique pas de dégradation des performances: cela signifie que le choix de la taille du précodage linéaire en fonction de la diversité du canal n'est pas critique, et qu'un  $L$  trop grand n'est pas néfaste. Toutefois, le régime asymptotique n'est pas atteint dans nos simulations, puisque la diversité théorique du système est  $NMD = 12$ , et que la pente calculée entre les deux points de plus haut rapport signal-à-bruit est seulement de -5,6 pour le cas  $L = 12$ .

En régime non-asymptotique, on constate que des tailles plus faibles de  $\mathbf{Q}$  permettent d'améliorer le gain de codage: le taux d'erreur symbole est plus faible pour les petites valeurs de  $L$ . En revanche, différentes tailles de  $L$  impliquent des tailles de constellations différentes pour les  $\mathbf{a}_k$ , donc un nombre de bits par symbole différent. Une fois ramené au taux d'erreur binaire, l'avantage des petites valeurs de  $L$  sur le gain de codage disparaît, comme le montre la figure 2. Par contre, l'avantage des grandes valeurs de  $L$  lorsque le rapport signal-à-bruit est élevé est toujours vérifiable en termes de taux d'erreur binaire.

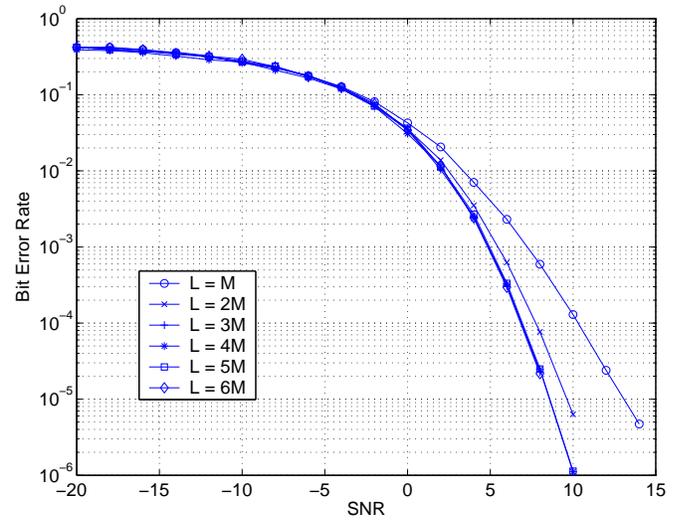


FIG. 2: Taux d'erreur bit avec détection MV-BFA

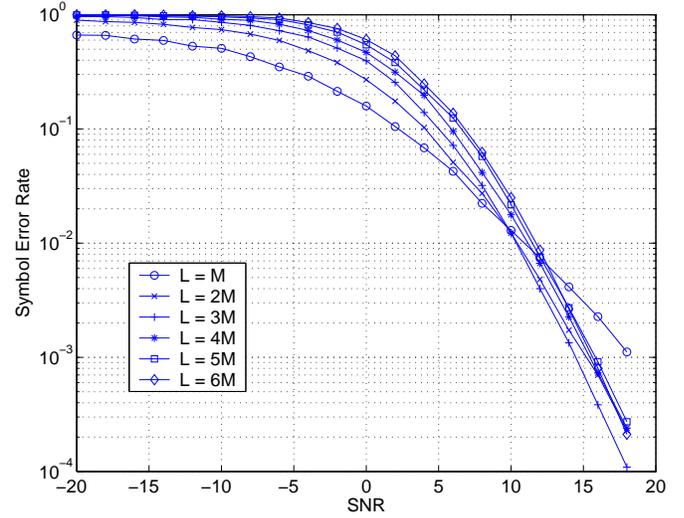


FIG. 3: Taux d'erreur symbole avec détection EQMM-IC

### 5.2 Détection EQMM-IC

Dans ce cas largement sous-optimal mais plus réaliste, on constate (voir figure 3) que, malgré un décalage important par rapport à la borne du filtre adapté (environ 8dB pour un taux d'erreur symbole de  $10^{-3}$ ), la tendance est la même: l'augmentation de la taille de  $\mathbf{Q}$  augmente la pente asymptotique de la courbe, même si on reste loin du régime asymptotique à haut rapport signal-à-bruit (la pente asymptotique n'est plus que de -2,6 entre les deux derniers points simulés, pour  $L = 12$ ).

On constate le même phénomène de saturation sans dégradation que celui qui a été observé en l'absence d'interférence, lorsque toute la diversité du canal est exploitée. On constate également que les petites valeurs de  $L$  ont l'avantage lorsque le rapport signal-à-bruit est faible. Comme dans le cas précédent, cet avantage disparaît lorsque l'on considère le taux d'erreur sur les bits, comme le montre la figure 4.

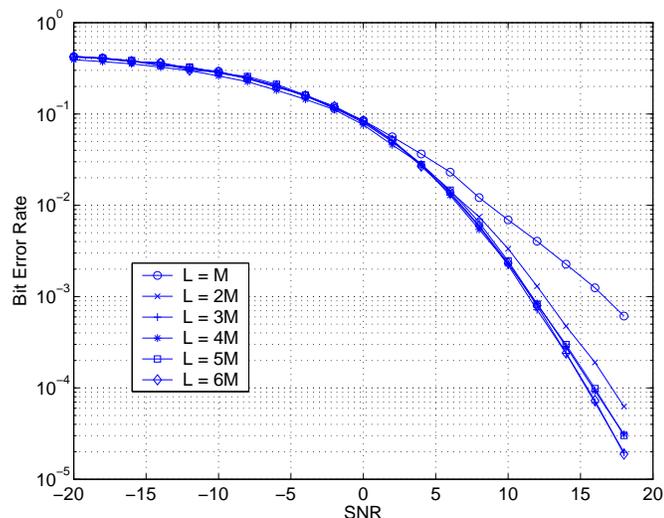


FIG. 4: Taux d'erreur bit avec détection EQMM-IC

## 6 Conclusion

Nous avons vérifié expérimentalement l'effet de l'exploitation de la diversité par la méthode du précodage linéaire. Il apparaît que, dans un cas pratique de décodage sous-optimal, les effets de l'exploitation de la diversité sont conformes à ce que prédit la borne du filtre adapté, à savoir qu'une exploitation maximale de la diversité augmente la pente asymptotique de la courbe du taux d'erreur, et qu'il n'est pas néfaste d'utiliser un format de transmission exploitant plus de diversité que celle effectivement offerte par le canal. L'optimisation du gain de codage, qui augmente pour de petites matrices de précodage, dans le but de diminuer le taux d'erreur symbole, se révèle ineffective en ce qui concerne le taux d'erreur binaire.

## Références

- [1] İ. Emre Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," Technical memorandum, Bell Laboratories, Lucent Technologies, October 1995, available at <http://mars.bell-labs.com/papers/proof/>.
- [2] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, no. 3, pp. 311–335, March 1998.
- [3] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744–765, March 1998.
- [4] M. Guillaud and D. T. M. Slock, "Multi-stream coding for MIMO OFDM systems with space-time-frequency spreading," in *Proc. 5<sup>th</sup> International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC)*, Honolulu, HI, USA, October 2002.